Calculabilitate & Complexități  
Subiectul 1

Mașini Turing

horizontal line

# Ce tre să știi?

Nota 6:

- definitii pentru toate tipurile de masini Turing (deterministe, nedeterministe, cu mai multe benzi)

- limbaj acceptat si functie Turing calculabila

- relatiile intre ele tipurile de masini Turing (enunturi)

Fiecare demonstratie, la alegere: 2p

# Definiții

O **mașină Turing** se definește ca un 7-tuplu M = (Q, V, U, 𝛿, q0, B, F), unde:

* **Q** este mulțimea stărilor
* **V** este alfabetul de input
* **U** este alfabetul benzii, include V (pentru că mașina modifică inputul)
* **𝛿** este funcția de tranziție, parțial definită.
  + Dacă mașina are o singură bandă:



* + - **𝛿 : Q x U -> P(Q x U x {L, R})**
    - 𝛿(q, a) conține (s, b, X) = dacă mașina se află în starea q și citește pe bandă simbolul a. Atunci:
      1. Înlocuiește simbolul a cu simbolul b
      2. deplasează capul de citire scriere în direcția indicată de X.
      3. Schimbă starea q în starea s
    - Mașina Turing se numește **deterministă** dacă |𝛿(q, a)| 1 oricare ar fi q și a. Altfel, mașina se numește **nedeterministă**.
  + Dacă mașina are mai multe benzi:



* + - **𝛿 : Q x Un -> P(Q x Un x {L, R}n)**
    - 𝛿(q, a1, a2, …, an) conține (s, b1, b2, …, bn, X1, X2, …Xn) = dacă mașina se află în starea q și citește simbolul a1 pe banda 1, a2 pe banda 2, …, an pe banda n, atunci:
      1. scrie b1 în locul lui a1, b2 în locul lui a2, …, bn în locul lui an
      2. capul de citire scriere corespunzător benzii i se deplasează în direcția indicată de Xi.
      3. Schimbă starea q în starea s
    - Dacă |𝛿(q, a1, a2, …, an)| 1, pentru orice q și orice a1, a2, …, an, atunci mașina se numește **deterministă**. Altfel, mașina Turing este **nedeterministă**.
* **q0** este starea inițială a mașinii
* **B** este simbolul blank (simbol care marchează sfârșitul inputului)
* **F** este mulțimea stărilor finale

Mașina Turing M poate fi:

* Dispozitiv de acceptare
  + Mașina are la început pe bandă un cuvânt w V\*
  + Mașina decide dacă w L(M) = L:
    - Dacă M se oprește într-o stare finală, atunci w este **acceptat** (L).
    - Dacă M nu se oprește sau se oprește într-o stare nefinală, atunci w este **respins** (L).
  + {w V\* | w acceptat de M} = L(M) = **limbajul acceptat de M**
* Dispozitiv de calcul
  + Avem funcția f : Nk -> N - definită parțial sau total
  + Input: (x1, x2, …, xk) din Nk, scris astfel: 1x1+101x2+10...01xk+1
  + Dacă f(x1, x2, …, xk) este definit, mașina se oprește într-o stare finală și vom găsi pe bandă output-ul: 1f(x1, x2,..., xk)+1
  + Dacă f(x1, x2, x3, …, xk) nu este definit, mașina nu se oprește într-o stare finală
  + Dacă se poate construi o astfel de mașină pentru funcția f, atunci f se numește **Turing calculabilă**.

# Relațiile între tipurile de mașini Turing

1. O mașină Turing cu n benzi este echivalentă cu o mașină Turing cu o singură bandă.
2. O mașină Turing nedeterministă cu o bandă este echivalentă cu o mașină Turing deterministă cu 3 benzi.
3. Deci, o mașină Turing nedeterministă cu o singură bandă este echivalentă cu o mașină Turing deterministă cu o singură bandă. (rezultă din 1 și din 2).

# Demonstrații

### Pentru orice mașină Turing M nedeterministă cu o bandă, există o mașină Turing cu 3 benzi M’, deterministă echivalentă cu M.

#### Demonstrație

Fie M = (Q, V, U, 𝛿, q0, B, F) o mașină Turing nedeterministă.

Fie E = {(q, a, s, b, x)} unde:

* q, s sunt stări (elemente ale mulțimii Q)
* q nu este stare finală (nu aparține lui F)
* a, b sunt din U și b nu e B.
* x e L sau R.
* Dacă mașina se află în starea q și citește simbolul a, atunci scrie b, deplasează capul de citire în direcția indicată de x și trece în starea s.

M’ are 3 benzi și lucrează astfel:

1. Copiază w pe banda 3.
2. Generează pe banda 2 succesorul cuvântului din E\* înscris pe bandă.
3. Citește simbolul de pe banda 2: (q, a, s, b, x)
   1. Verifică dacă mașina se află în starea q. Dacă nu, merge la pasul 5.
   2. Verifică dacă simbolul citit de pe banda 1 este a. Dacă nu, merge la pasul 5.
   3. Scrie b peste a.
   4. Schimbă starea în s.
   5. Deplasează capul de citire scriere pe banda 1 în direcția indicată de x.
   6. Deplasează capul de citire scriere pe banda 2 la dreapta.
   7. Dacă mai sunt simboluri pe bandă, se reia pasul 3. Altfel, merge la pasul 4.
4. Verificam daca starea obtinuta e finala. Daca da, ne oprim. Altfel mergem la pasul 5.
5. Copiază w de pe banda 3 pe banda 1. Merge în starea q0 și merge la pasul 2.

### Pentru orice mașină Turing M cu k benzi, există o mașină Turing cu o bandă, M’, care echivalentă cu M.

În plus, daca M este deterministă, M’ este și ea deterministă.

Avem mașina M, cu k benzi:



Și acum, construim mașina M’ astfel:

* M’ are o singură bandă auxiliară, iar elementele ei vor fi **vectori cu 2k piste:**
  + Pe pista 2 \* i - 1 se află conținutul benzii i a mașinii M
  + Pista 2 \* i conține 0-uri mai puțin pe o poziție - are 1 unde se afla capul de citire-scriere al benzii i a mașinii M.
  + Mașina M’ citește conținutul benzii de la stânga la dreapta și memorează simbolurile de pe pistele impare aflate imediat deasupra simbolurilor 1 de pe pistele pare.
  + Când ajunge la finalul benzii, simulează mișcările pe care le-ar fi făcut mașina M. Parcurge din nou banda, dar de la dreapta la stânga, și actualizează conținutul pistelor impare în conformitate cu simbolurile ce ar fi fost scrise de mașina M și conținutul pistelor pare în conformitate cu direcția în care s-ar fi deplasat fiecare cap de citire.